

5. Системы счисления (19 баллов)
[Количество чисел]

Сколько существует целых положительных чисел, больших 83 и меньших 494, запись которых в восьмеричной системе счисления не будет содержать ни одной повторяющейся цифры? В ответе укажите целое число.

Решение.

Искомое количество чисел может быть определено как разность общего количества целых чисел, заключенных между 83 и 494, и количества целых чисел между этими границами, которые после перевода в восьмеричную систему будут содержать в себе повторяющиеся цифры.

1. Общее количество целых чисел, заключенное между 83 и 494 (обе границы не входят) составляет:

$$494 - 83 - 1 = 410(\text{чисел}).$$

2. Осуществим перевод границ в восьмеричную систему счисления:

$$\begin{array}{r|l} 494 & 8 \\ \hline -48 & 61 \\ \hline 14 & 56 \\ -8 & 5 \\ \hline 6 & \end{array}$$

$$494_{10} = 756_8;$$

$$\begin{array}{r|l} 83 & 8 \\ \hline -80 & 10 \\ \hline 3 & 8 \\ & 1 \\ & 2 \end{array}$$

$$83_{10} = 123_8.$$

Таким образом, все интересующие нас числа будут трехзначными.

3. Определим количество трехзначных целых чисел, содержащих в себе повторяющиеся цифры. Такие числа могут иметь один из следующих видов:

$$ABB, ABA, AAB, AAA,$$

где A – произвольное число от 1 до 7, B – произвольное число от 0 до 7, $A \neq B$.

4. Рассчитаем количество трехзначных целых чисел, содержащих в себе повторяющиеся цифры при фиксированном старшем разряде.
 - а) Числа вида ABB – 7 чисел.
 - б) Числа вида ABA – 7 чисел.

с) Числа вида AAB – 7 чисел.

д) Числа вида AAA – 1 число.

Таким образом для любого значения A существует

$$3 \cdot (n - 1) + 1 = 22$$

(n – основание системы счисления) целых числа, содержащих в себе повторяющиеся цифры. При этом A может принимать

$$(n - 1) = 7$$

значений (от 1 до 7 включительно). Следовательно, всего имеем

$$7 \cdot 22 = 154$$

трехзначных целых числа, в которых присутствуют повторяющиеся цифры.

- 5.левой границей рассматриваемого нами интервала в восьмеричной системе счисления является число 123, а правой границей – число 756. Следовательно из общего количества целых чисел с повторяющимися цифрами необходимо исключить числа 100, 101, 121, 122, 757, 766, 767, а также все числа вида $11A$ (8 чисел), и $77B$ (8 чисел), где A и B – произвольные цифры от 0 до 7. Таким образом, получаем:

$$154 - 8 - 8 - 7 = 131$$

целое число с повторяющимися цифрами лежит в интервале между 123 и 756 в восьмеричной системе счисления.

6. Найдем количество целых чисел, заключенных между 83 и 494, запись которых в восьмеричной системе счисления не будет содержать ни одной повторяющейся цифры, как разность общего количества целых чисел, заключенных между этими границами, и количества целых чисел между этими границами, которые после перевода в восьмеричную систему не будут содержать в себе повторяющиеся цифры:
 $410 - 131 = 279$ (чисел).

Ответ: 279.